**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ**

**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Инженерная школа природных ресурсов

Направление подготовки Химическая технология

Отделение химической инженерии

**Численные методы Решения обыкновенных дифференциальных уравнений**

**Лабораторная работа по дисциплине «Углубленный курс информатики»**

Выполнил студент гр. 2Д93 И.В. Петришина

(Подпись)

06.05. 2020 г.

Отчет принят:

Преподаватель

доцент ОХИ ИШПР, к.т.н. В.А. Чузлов

(Подпись)

\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020 г.

Томск 2020 г.

**Цель работы:** изучить численные методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теоретическая часть**

Любая физическая ситуация, где рассматривается степень изменения одной переменной по отношению к другой переменной, описывается дифференциальным уравнением.

Дифференциальные уравнения устанавливают связь между независимыми переменными, искомыми функциями и их производными. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Метод Эйлера является сравнительно «грубым» методом решения дифференциальных уравнений, однако идеи, положенные в его основу, являются, по существу, исходными для очень широкого класса численных методов.

Метод Рунге-Кутта требует существенно большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить вычисления с бóльшим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутта.

**Практическая часть**

**Задание**

где 𝑦 ̃ - расчетное значение, - значение, полученное из аналитического решения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Дифференциальное уравнение** | **Отрезок, шаг** | **Начальные условия** | **Аналитическое решение** |
|  | [1;2];  h = 0.1 | x0 = 1;  y0 =3.0307 |  |
|  | [1; 2];  h = 0.2 | x0 = 1;  y0 = e |  |
|  | [0; 2];  h = 0.2 | x0 = 0;  y0 = ln(2) |  |
|  | [2; 3];  h = 0.2 | x0 = 2;  y0 = 4 |  |

**Программная реализация, 1 уравнение**

**Метод Рунге-Кутты**

**program** lb12\_1;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := -(2 \* y + 1) \* cos(x) / sin(x)

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(runge\_kutt\_method(1, 2, 0.1, 3.0307));

**end**.

**Ответ**

1.0000 3.0307

1.1000 2.6476

1.2000 2.3779

1.3000 2.1927

1.4000 2.0744

1.5000 2.0126

1.6000 2.0021

1.7000 2.0422

1.8000 2.1361

1.9000 2.2918

2.0000 2.5236

**Метод Эйлера**

**program** lb12\_1;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := -(2\*y + 1)\* cos(x)/sin(x)

**end**;

**function** eyler\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:8:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(eyler\_method(1, 2, 0.1, 3.0307))

**end**.

**Ответ**

1.0000 3.0307

1.1000 2.5773

1.2000 2.2640

1.3000 2.0491

1.4000 1.9076

1.5000 1.8245

1.6000 1.7916

1.7000 1.8050

1.8000 1.8649

1.9000 1.9752

2.0000 2.1443

**Аналитическое решение**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 3,0307 |
| 1,1 | 2,6476 |
| 1,2 | 2,3779 |
| 1,3 | 2,1927 |
| 1,4 | 2,0744 |
| 1,5 | 2,0126 |
| 1,6 | 2,0021 |
| 1,7 | 2,0422 |
| 1,8 | 2,1361 |
| 1,9 | 2,2918 |
| 2 | 2,5236 |

**Погрешность**

|  |
| --- |
| Метод Эйлера, % |
| 0,0002 |
| 2,6560 |
| 4,7889 |
| 6,5480 |
| 8,0396 |
| 9,3449 |
| 10,5155 |
| 11,6150 |
| 12,6951 |
| 13,8140 |
| 15,0310 |

Результаты аналитического решения и метода   
Рунге-Кутты совпали.

**Программная реализация, 2 уравнение**

**Метод Рунге-Кутты**

**program** lb12\_2;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := - (y\*ln(y))/x

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(runge\_kutt\_method(1, 2, 0.2, e));

**end**.

**Ответ**

1.0000 2.7183

1.2000 2.3010

1.4000 2.0427

1.6000 1.8683

1.8000 1.7429

2.0000 1.6487

**Метод Эйлера**

**program** lb12\_2;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := - (y\*ln(y))/x

**end**;

**function** eyler\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:8:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(eyler\_method(1, 2, 0.2, e))

**end**.

**Ответ**

1.0000 2.7183

1.2000 2.1746

1.4000 1.8931

1.6000 1.7205

1.8000 1.6038

2.0000 1.5196

**Аналитическое решение**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 2,7183 |
| 1,2 | 2,3010 |
| 1,4 | 2,0427 |
| 1,6 | 1,8682 |
| 1,8 | 1,7429 |
| 2 | 1,6487 |

**Погрешность**

|  |
| --- |
| Метод Эйлера, % |
| 0 |
| 5,4923 |
| 7,3249 |
| 7,9083 |
| 7,9814 |
| 7,8316 |

Результаты аналитического решения и метода   
Рунге-Кутты совпали.

**Программная реализация, 3 уравнение**

**Метод Рунге-Кутты**

**program** lb12\_3;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := 2\*x/exp((y-sqr(x))\*ln(e))

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(runge\_kutt\_method(0, 2, 0.2, ln(2)));

**end**.

**Ответ**

0.0000 0.6931

0.2000 0.7133

0.4000 0.7763

0.6000 0.8893

0.8000 1.0635

1.0000 1.3133

1.2000 1.6528

1.4000 2.0920

1.6000 2.6349

1.8000 3.2790

2.0000 4.0190

**Метод Эйлера**

**program** lb12\_3;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := 2\*x/exp((y-sqr(x))\*ln(e))

**end**;

**function** eyler\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:8:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(eyler\_method(0, 2, 0.2, ln(2)))

**end**.

**Ответ**

0.0000 0.6931

0.2000 0.6931

0.4000 0.7348

0.6000 0.8248

0.8000 0.9756

1.0000 1.2044

1.2000 1.5304

1.4000 1.9689

1.6000 2.5240

1.8000 3.1874

2.0000 3.9463

**Аналитическое решение**

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | 0,6931 |
| 0,2 | 0,9130 |
| 0,4 | 1,1711 |
| 0,6 | 1,4633 |
| 0,8 | 1,7839 |
| 1 | 2,1269 |
| 1,2 | 2,4868 |
| 1,4 | 2,8590 |
| 1,6 | 3,2400 |
| 1,8 | 3,6270 |
| 2 | 4,0181 |

**Погрешность**

|  |  |
| --- | --- |
| Метод Эйлера, % | Метод Рунге-Кутты, % |
| 0 | 0 |
| 24,0867 | 21,8743 |
| 37,2556 | 33,7119 |
| 43,6336 | 39,2257 |
| 45,3109 | 40,3835 |
| 43,3737 | 38,2537 |
| 38,4600 | 33,5380 |
| 31,1341 | 26,8284 |
| 22,0976 | 18,6748 |
| 12,1192 | 9,5936 |
| 1,7881 | 0,0212 |

**Программная реализация, 4 уравнение**

**Метод Рунге-Кутты**

**program** lb12\_4;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := (y-3)/(3\*sqr(x)+x)

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(runge\_kutt\_method(2, 3, 0.2, 4));

**end**.

**Ответ**

2.0000 4.0000

2.2000 4.0132

2.4000 4.0244

2.6000 4.0341

2.8000 4.0426

3.0000 4.0500

**Метод Эйлера**

**program** lb12\_4;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := (y-3)/(3\*sqr(x)+x)

**end**;

**function** eyler\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:8:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(eyler\_method(2, 3, 0.2, 4))

**end**.

**Ответ**

2.0000 4.0000

2.2000 4.0143

2.4000 4.0264

2.6000 4.0368

2.8000 4.0459

3.0000 4.0539

**Аналитическое решение**

|  |  |
| --- | --- |
| 2 | 4,0000 |
| 2,2 | 4,0132 |
| 2,4 | 4,0244 |
| 2,6 | 4,0341 |
| 2,8 | 4,0426 |
| 3 | 4,0500 |

**Погрешность**

|  |
| --- |
| Метод Эйлера, % |
| 0 |
| 0,0285 |
| 0,0499 |
| 0,0672 |
| 0,0828 |
| 0,0963 |

Результаты аналитического решения и метода   
Рунге-Кутты совпали.

**Выводы**

В ходе лабораторной работы были изучены численные методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Также, определена погрешность расчетного значения переменной y для каждого из методов вычисления.